I. Contrôle : 2006 - 2007

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par : $\begin{cases} f(e_1) = e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ f(e_2) = e_1 - \frac{1}{2}e_3 \\ f(e_3) = 2e_3 \end{cases}$ où $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$

1/ Donner la matrice A de f dans la base B

2/ Soient $u = (-1,1,0)$; $v = (1,1,1)$ et $w = (0,0,1)$

a/ Vérifier que $B' = \{u, v, w\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

b/ Donner la matrice P, de passage de B à B'

c/ Donner la matrice P^{-1}

3/ En déduire la matrice A' de f dans la base B'

4/ En déduire que A' est inversible

5/ Donner l'expression de A^n où $n \in \mathbb{N}$

II. Contrôle : Rattrapage 2005 - 2006

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par : $\begin{cases} f(e_1) = \frac{3}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_3 \\ f(e_2) = -\frac{1}{2}e_1 + e_2 - \frac{1}{2}e_3 \\ f(e_3) = \frac{1}{2}e_1 + \frac{3}{2}e_3 \end{cases}$ où $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

1/ Donner la matrice A de f dans B

2/ Soient $e_1' = (1,0,-1)$ $e_2' = (1,1,0)$; $e_3' = (1,0,1)$

vérifier que $B' = \{e_1', e_2', e_3'\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

3/ Écrire $f(e_1')$, $f(e_2')$, $f(e_3')$ dans la base B'

4/ En déduire la matrice A' de f dans B'

5/ Donner la matrice A' en utilisant la matrice P de passage de B à B'

III. Contrôle : 2006 - 2007

Exercice 1 : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ / $\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + e_3 \\ f(e_3) = e_1 + 4e_2 + 3e_3 \end{cases}$ $B = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique

1/ Donner 1 base de Ker f

2/ Donner 1 base de Im f

3/ A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$

Exercice 2 : E un K.e.v et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre p

càd $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$

1/ M. que : $\exists u \in E$; $u \neq 0$ telque la famille
$B = \{u, f(u), f^2(u), \dots, f^{p-1}(u)\}$ soit libre

2/ En deduire que si $\dim E = p$ alors B est une base de E

3/ A-t-on $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$

Exercice 3 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1°/ Montrer que M est inversible

2°/ Calculer $M^2 - M - 2I$, en deduire de nouveau que M est inversible et calculer M^{-1}

3°/ En deduire la solution du système $\begin{cases} y+z = 3 \\ x+z = 3 \\ x+y = 3 \end{cases}$

IV Contrôle 2007-2008

Exercice 2 : Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ un endomorphisme nilpotent d'ordre 3 (càd. $f^3 = 0$ et $f^2 \neq 0$)

1/ Montrer qu'il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^3$, non nul telque la famille $B = \{u, f(u), f^2(u)\}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$

2/ Ecrire la matrice de f dans B

V. Exercice 1 Contrôle 07-08 et 03-04

On considere l'application lineaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$x = (x_1, x_2, x_3)$ $f(x) = (x_1, -x_1 + 2x_2, x_1 + 3x_2 + 5x_3)$ $B = (e_1, e_2, e_3)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$

1/ Ecrire la matrice de f dans la base B

2/ Soit $u_1 = (1,1,-1)$ $u_2 = (0,1,-1)$ et $u_3 = (0,0,1)$ 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$

a/ Verifier que $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$

b/ Ecrire la matrice P de passage de B à B'

c/ Calculer P^{-1}

d/ En deduire la matrice A' de f dans la base B'

3/ Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$

4/ On considere 3 suites (U_n), (V_n) et (W_n) définies par :

$$\begin{cases} U_n = U_{n-1} \\ V_n = -U_{n-1} + 2V_{n-1} \\ W_n = U_{n-1} + 3V_{n-1} + 5W_{n-1} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \\ W_0 = 3 \end{cases}$$

Exprimer U_n, V_n et W_n en fonction de n.



I. Contrôle 06-07

1/ $A = M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 2 \end{pmatrix}$

2/ a/ Soient α, β, γ de $\mathbb{R}$ telsque $\alpha u + \beta v + \gamma w = (0,0,0)$

$\alpha(-1,1,0) + \beta(1,1,1) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0) \longrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

le système $B' = \{u, v, w\}$ est libre

Or $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{Card } B'$ donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$

b/ $P = P(B \to B') = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c/ $\det P = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\text{Com } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t\text{Com } P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

3/ $A' = M(f, B') = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & \cdot & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Remarque : A' est la matrice de f dans B', càd les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de B' dans B'

4/ On a : $A' = P^{-1} A P$ d'où $A = P A' P^{-1}$ et on a :

$\det A = \det(P A' P^{-1}) = \det P \times \det A' \times \det P^{-1} = (-2)(-2)(-\frac{1}{2}) = -2 \neq 0 \Rightarrow A$ est inversible

5/ $A^n = A \cdot A \ldots A = (PA'P^{-1})(PA'P^{-1}) \ldots (PA'P^{-1}) = P(A')^n P^{-1}$

$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2(-1)^n & 1/2(-1)^n & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 \cdot 2^n & -1/2 \cdot 2^n & 2^n \end{pmatrix}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1/2(-1)^n + 1/2 & -1/2(-1)^n + 1/2 & 0 \\ -1/2(-1)^n + 1/2 & 1/2(-1)^n + 1/2 & 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot 2^n + 1/2 & -1/2 \cdot 2^n + \frac{1}{2} & 2^n \end{pmatrix}$$

II. Contrôle : Rattrapage 05-06

1/ $A = M(f, B) = \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

2/ $\alpha e_1' + \beta e_2' + \gamma e_3' = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$

B' est libre et comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{Card } B'$ alors B' est base de $\mathbb{R}^3$

3/ $f(e_1') = f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = e_1 - e_3 = e_1'$

$f(e_2') = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = e_1 + e_2 = e_2'$

$f(e_3') = f(e_1 + e_3) = f(e_1) + f(e_3) = 2e_1 + 2e_3 = 2e_3'$

4/ $A' = M(f, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5/ $A' = P^{-1} A P$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\det P = 2$; $P^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

d'où $A' = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

III : Contrôle 06-07 : Exercice 1

1/ Base de Ker f :

Posons M matrice de f dans B alors $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Soit $(x,y,z) \in \text{Ker} f$ alors $f(x,y,z) = 0$; $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+4z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_1+E_3 \end{matrix}\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+4z=0 \\ 2x+4z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=0 \\ x=-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2z-y+z=0 \\ x=-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=-2z \end{cases}$

d'où $(x,y,z) = (-2z,-z,z) = -z(2,+1,-1)$;

$B_1 = \{u_1 = (2,1,-1)\}$ est 1 famille génératrice de Ker f et comme $(2,1,-1) \neq (0,0,0)$ alors B_1 est base de Ker f

2/ Base de Im f : $\text{Im} f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \text{vect}(f(e_1), f(e_2))$

car $f(e_3) = 2f(e_1) + f(e_2)$

De plus $u_2 = f(e_1) = (1,2,3)$ et $u_3 = f(e_2) = (-1,0,1)$ sont libres

$(\alpha u_2 + \beta u_3 = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha = 0 \\ 3\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0)$

donc $B_2 = \{u_2, u_3\}$ est base de Im f

3/. $\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ et ainsi on aura : la somme directe

. Montrons que $\text{Ker} f \cap \text{Im} f = \{0\}$

Soit $(x,y,z) \in \text{Ker} f \cap \text{Im} f$ alors $(x,y,z) = \alpha u_1 = (2\alpha, \alpha, -\alpha)$ et

$(x,y,z) = \beta u_2 + \gamma u_3 = (\beta - \gamma, 2\beta, 3\beta + \gamma)$ alors $\begin{cases} \beta - \gamma = 2\alpha \\ 2\beta = \alpha \\ 3\beta + \gamma = -\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 2\beta \\ \beta - \gamma = 4\beta \\ 3\beta + \gamma = -2\beta \end{cases}$

$(2)+(3) \Rightarrow 4\beta = 2\beta \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \text{Ker} f \cap \text{Im} f = \{(0,0,0)\}$

Exercice 2 1/ on a $f^{p-1} \neq 0$ donc $\exists u \neq 0$ telque $u \in E$ et $f^{p-1}(u) \neq 0$

Considérons les scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ telsque :

$a_0 u + a_1 f(u) + a_2 f^2(u) + \dots + a_{p-1} f^{p-1}(u) = 0$

Appliquons à ce vecteur l'endomorphisme f^{p-1} et on obtient $a_0 f^{p-1}(u) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

on obtient $a_1 f(u) + a_2 f^2(u) + \dots + a_{p-1} f^{p-1}(u) = 0$

on applique à ce vecteur f^{p-2} et on obtient $a_1 f^{p-1}(u) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$

et ainsi de suite on obtient $a_2 = 0, \dots, a_{p-1} = 0$ d'où B est libre

2/ Si $\dim E = p$ alors $\text{Card}\, B = p = \dim E$, B libre $\Rightarrow B$ base de E

3/ On a : $f^p = 0$ donc $f^p(u) = 0$ càd $f(f^{p-1}(u)) = 0$

d'où $f^{p-1}(u) \in \text{Ker} f$

Comme $f^{p-1}(u) = f(f^{p-2}(u)) \in \text{Im} f$ alors $\text{Ker} f \cap \text{Im} f \neq \{0\}$ donc la somme n'est pas directe

$E \neq \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$

Exercice 3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1/ $\det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1+1) - (0) = 2 \neq 0 \Rightarrow M$ est inversible

$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$

2/ $M^2 - M - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0$

$M^2 - M = 2I \quad ; \quad M(M - I) = 2I \quad ; \quad M\left(\frac{1}{2}(M-I)\right) = I$

donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3/ le système s'écrit : $M X = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

d'où $X = M^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 3/2 \quad y = 3/2 \quad z = 3/2$

IV. Contrôle 07-08

1/ On a $f^2 \neq 0$ donc $\exists u \neq 0 \,/\, f^2(u) \neq 0$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \,/\, \alpha u + \beta f(u) + \gamma f^2(u) = 0 \quad (1)$

alors $f^2(\alpha u + \beta f(u) + \gamma f^2(u)) = f^2(0)$

$\alpha f^2(u) + \beta f^3(u) + \gamma f^4(u) = 0$

$\alpha f^2(u) = 0 \quad ; \quad$ or $f^2(u) \neq 0 \Rightarrow \alpha = 0$

la relation (1) devient : $\beta f(u) + \gamma f^2(u) = 0$

et on a $f(\beta f(u) + \gamma f^2(u)) = f(0) \Rightarrow \beta f^2(u) + \gamma f^3(u) = 0 \Rightarrow \beta f^2(u) = 0$

$f^2(u) \neq 0 \Rightarrow \beta = 0$

la relation (1) devient $\gamma f^2(u) = 0 \Rightarrow \gamma = 0$

2/ $f(u) = 0.u + 1.f(u) + 0.f^2(u)$

$f(f(u)) = f^2(u) = 0.u + 0.f(u) + 1.f^2(u) \qquad \Rightarrow M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(f^2(u)) = f^3(u) = 0 = 0.u + 0.f(u) + 0\,f^2(u)$



V. Contrôle 07-08 et 03-04

1/ $A = \mathcal{M}(f, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

2/ a/ Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ / $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0,0,0)$

$\alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,-1) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$

$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$ donc $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ famille libre de $\mathbb{R}^3$

Or $\dim \mathbb{R}^3 = \text{Card } B' = 3$ donc B' est une base de $\mathbb{R}^3$

b/ $P = \mathcal{M}(B \to B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c/ $\det P = 1$; $\text{Com} P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t\text{Com} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d/ $A' = \mathcal{M}(f, B') = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

3/ On a $A' = P^{-1} A P \Rightarrow A = P A' P^{-1}$

et $A^n = PA'P^{-1} . PA'P^{-1} . PA'P^{-1} \ldots PA'P^{-1} = P . A'^n P^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2^n & 2^n & 0 \\ 0 & 5^n & 5^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 5^n-2^n & 5^n \end{pmatrix}$

4/ le système s'écrit $\begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} \\ V_{n-1} \\ W_{n-1} \end{pmatrix}$

Si on pose $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$ alors on obtient : $X_n = A X_{n-1}$

d'où $X_n = A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-2^n & 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 5^n-2^n & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$U_n = 1$ $V_n = 1 - 2^n + 2.2^n = 2^n + 1$, $W_n = 2^n - 1 + 2(5^n - 2^n) + 3.5^n$

$W_n = 5^{n+1} - 2^n - 1$

